ISSN 1907-6452

Centre

Civil & Electrical Engineering Journal

Volume 9 | Number 1 | June 2014

Centre

Civil & Electrical Engineering Journal
ISSN: 1907-6452
Volume 9, Number 1, June 2014

Editor and Administration Office	:	Universitas Internasional Batam Jl. Gajah Mada, Baloi Sei Ladi – Batam, Indonesia Telp: +62-778-7437 111 (Hunting) Fax: +62-778-7437 112 E-mail: centre@uib.edu Website: http://www.uib.edu

CENTRE Journal is a scientific journal publised by Universitas Internasional Batam two times year (June and December). Submission of the article on this journal is addressed to editorial office above. All articles will be subjected to editorial review and no charges for submission.

1907 6454

Centre

Civil & Electrical Engineering Journal
ISSN: 1907-6452
Volume 9, Number 1, June 2014

Maximum Likelihood Estimations (MLE) untuk Regresi Linier Multilevel

Yayuk Setyaning Astutik
Program Studi Teknik Sipil, Universitas Internasional Batam
Email : [1] *yayuk@uib.ac.id* , *yayuksetyaninga@gmail.com*

ABSTRAK

Data yang memiliki struktur hirarki berarti unit-unit pada level yang lebih rendah, tersarang atau *tercluster* dalam unit-unit pada level yang lebih tinggi, Data hirarki tersebut dinamakan data multilevel. Pada data multilevel, observasi-observasi dalam grup (level-2) yang sama cenderung berkorelasi atau mempunyai karakteristik yang *similar* dibandingkan dengan observasi yang berbeda. Untuk mengestimasi parameter-parameter dalam model regresi digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

Kata Kunci: *Multilevel, Parameter, Maximum Likelihood Estimation (MLE).*

1. Pendahuluan

Pemodelan mutilevel adalah pemodelan untuk data yang memiliki struktur hirarki. Pemodelan ini digunakan pada data hirarki karena antar amatan pada level yang lebih rendah tidak saling bebas, sehingga melanggar asumsi kebebasan dalam pendekatan statistika konvensional yang mengasumsikan anatar amatan saling bebas.

Data pengamatan berulang dimana satu individu diamati pada beberapa titik waktu juga dapat dipandang sebagai data dengan struktur hirarki, dimana nilai amatan antar waktu (level-1) tersarang dalam individu (level-2). Pada pemodelan multilevel, respon diukur pada level terendah sedangkan peubah penjelas dapat didefinisikan pada setiap level yang memiliki ciri bahwa interaksi antara peubah-peubah menandakan individu dan peubah-peubah yang menandakan kelompok.

1.1. Kerangka Teoritis

1.1.1. Model Multilevel Regresi Linier Sederhana

Suatu hubungan antara variabel respon y dengan variabel prediktor x, yang modelnya dapat ditulis dalam bentuk :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \tag{1}$$

Dari persamaan (1) mempunyai interprestasi bahwa α merupakan intersep, β merupakan *slope* dan e_i merupakan residual.

Namun pada kasus tertentu dimana dari data didapatkan sebuah keterangan bahwa terdapat lebih dari satu level pada variabel prediktor yang juga diduga ikut berpengaruh pada variabel respon, maka bentuk persamaannya menjadi :

$$y_{ij} = \alpha_j + \beta x_{ij} + e_{ij} \tag{2}$$

Model persamaan (2) merupakan model yang menggambarkan hubungan yang bersifat simultan dimana j ditujukan untuk i unit pada level-2 dan untuk unit pada level-1. Persamaan (2) pada dasarnya merupakan model *single level*, meskipun menjelaskan hubungan yang terpisah untuk setiap level.

2. Model Multilevel Regresi Linier Berganda

Konsep dasar pada model multilevel pada regresi linier berganda pada dasarnya sama seperti konsep analisis regresi linier berganda pada umumnya, yaitu terdapat beberapa variabel penjelas yang menerangkan variabel dependen. Namun yang membedakan adalah pada model multilevel regresi linier berganda analisa mengenai model dengan 2 level pengamatan yang berbeda.

Level-1 menerangkan tentang pengamatan pada level individu, mempunyai bentuk/model persamaan yang terpisah dengan level-2 yang menerangkan pengamatan tingkat grup. Pada kedua level ini masing-masing mempunyai persamaan yang berbeda, namun dapat disubtitusikan satu dengan yang lainnya

2.1. Model Regresi Level-1

Pengamatan pada level ini dapat pula disebut level individu, level mikro dan sebagainya. Pada level ini terdapat variabel keluaran/variabel respon, dan regresi ini merupakan regresi dimana variabel prediktornya diamati pada tingkat individu yang diketahui. Persamaannya adalah sebagai berikut :

$$Y_j = \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{1j} + \beta_{2j} X_{2j} + \ldots + \beta_{ij} X_{ij} + \varepsilon_j \tag{3}$$

dengan $i = 1,2,\ldots p;\ j = 1,2,\ldots,g$.

Pada persamaan di atas terlihat bahwa persamaan ini hampir sama dengan persamaan pada regresi linier yan biasa ditemui. Namun dikarenakan ini merupakan model multilevel dimana mempunyai 2 tingkatan level, maka persamaan tersebut merupakan persamaan pada level-1 yang tidak mengikutsertakan efek Z (*variabel makro*).

2.2. Model Regresi Level-2

Pada level ini pengamatan dilakukan pada tingkatan grup dimana level individu tersebut tersarang. Pada level ini masing-masing variabel prediktor pada level-1 diuraikan lagi hingga membentuk sebuah persamaan yang mengikutsertakan variabel-variabel independen pada pengamatan level-2. Persamaannya sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\beta_{01} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}w_1 + \ldots + \gamma_{0n}w_n + u_1\\ \beta_{11} &= \gamma_{10} + \gamma_{11}w_1 + \ldots + \gamma_{1n}w_n + u_2\\ &\vdots\\ \beta_{ij} &= \gamma_{i0} + \gamma_{i1}w_1 + \ldots + \gamma_{in}w_n + u_i\end{aligned} \tag{4}$$

$$i = 1,2,\ldots,p;\ \ n = 1,2,\ldots,r;\ j = 1,2,\ldots,q$$

Dari persamaan (3) dan (4) dapat disubtitusikan dari persamaan level-2 ke dalam persamaan level-1, yang menghasilkan persamaan akhir yang merupakan gabungan dari kedua persamaan pada kedua level tersebut. Berikut persamaan akhirnya:

$$\begin{aligned}Y = {} & \gamma_{00} + \gamma_{01}w_1 + \ldots + u_1 + \gamma_{0n}w_n +\\ & (\gamma_{10} + \gamma_{11}w_1 + \ldots + \gamma_{1n}w_n + u_2)x_{1j}\\ & + \ldots + (\gamma_{i0} + \gamma_{i1}w_1 + \ldots + \gamma_{in}w_n + u_i)x_{ij} + \varepsilon\end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan (5) merupakan gabungan hasil subtitusi persamaan (4) kedalam persamaan (3). Persamaan ini merupakan persamaan akhir yang akan digunakan untuk memodelkan persamaan dari data yang digunakan. Variabel koefisien random level-2 u diasumsikan independen dengan residual level-1R. Koefisien random u independen antar grup, namun mungkin berkorelasi pada intra grup (Snijder & Bosker, 1995). Dan juga diasumsikan bahwa variabel R mempunyai distribusi normal dengan variansi konstan, sedangkan variabel u mempunyai distribusi normal multivariat dengan matriks kovarian konstan.

3. Metodologi Penelitian

Pada penulisan ini berdasarkan tinjauan pustaka dengan berbagai referensi dengan pembatasan pada Model Regresi Linier dengan 2 level dengan menggunakan metode estimasi *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

3.1. Model 2-Level Linier Sederhana

Untuk membuat persamaan (3) menjadi 2 level, model diberikan α_j, β_j yang merupakan sebuah variabel random. Untuk konsistensi dilakukan penggantian notasi $\alpha_j = \beta_{0j}$ dan $\beta = \beta_{1j}$ yang diasumsikan bahwa :

$$\beta_{0j} = \beta_0 + u_{0j};\ \beta_{1j} = \beta_1 + u_{1j}$$

dimana u_{0j}, u_{1j} adalah variabel random dengan parameter (Goldstein, 1999).

$$E(u_{0j}) = E(u_{1j}) = 0;\ Var(u_{0j}) = \sigma^2_{u0};$$

$$Var(u_{1j}) = \sigma^2_{u1};\ Cov(u_{0j}, u_{1j}) = \sigma_{u01} \tag{6}$$

Sehingga didapatkan bentuk baru sebagai berikut :

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + (u_{0j} + u_{1j}x_{ij} + e_{0ij}) \tag{7}$$

dengan $Var(e_{0ij}) = \sigma^2_{e0}$. Persamaan (7) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut : $E(Y) = X\beta$ dengan $Y = \{y_{ij}\}$.

$$E(y_{ij}) = X_{ij}\beta = (X\beta)_{ij};\ X = \{x_{ij}\}$$

Dimana $\{\ \}$ menotasikan matriks a, x merupakan matriks untuk variabel penjelas dan X_{ij} adalah baris ke-ij dalam x.

Untuk Persamaan (7) dipunyai $X = \{1\ \ \mathrm{x}_{ij}\}$.

Variabel random ini ditunjukan sebagai residual, dan pada kasus *single level* bahwa residual level-1 e_{0ij} merupakan model residual linier biasa. Untuk membuat model simetris yaitu bahwa setiap koefisien mempunyai hubungan dengan variabel penjelas, dapat didefinisikan secara lebih lanjut variabel penjelas bagi intersep β_0 dan residual yang terkait u_{0j}. Keuntungan persamaan (7) yang terbentuk dari model standar analisis regresi linier atau analisis variansi adalah adanya lebih dari satu parameter dan hal ini berdampak bahwa prosedur khusus dibutuhkan untuk memperoleh estimasi parameter yang tepat.

4. Analisa dan Pembahasan
4.1. Estimasi Parameter

Estimasi parameter pada regresi linier multilevel ini pada dasarnya mempunyai kegunaan yang sama pada regresi linier biasa, yaitu untuk mengetahui nilai-nilai dari parameter yang akan digunakan dalam proses regresi. Banyak jenis dan metode parameter yang dapat digunakan untuk menentukan nilai estimatornya seperti OLS, REML dan MLE. Diberikan persamaan model pada level-1 sebagai berikut :

$$y_j = x_j\beta_j + \varepsilon_j \qquad (8)$$

Setiap x_j mempunyai dimensi $(n_j \; x \; p)$ dan $\varepsilon_j \sim N(0,\sigma^2)$. Untuk lebih meyakinkan lagi maka akan dilakukan estimasi secara terpisah pada setiap level. Masalah yang sering muncul adalah bahwa terdapat beberapa grup yang tidak mempunyai data yang cukup untuk menghasilkan estimasi yang tetap. Pada model multilevel, problem ini diperbaiki dengan memodelkan beberapa atau seluruh koefisien β_j pada level-1 sebagai variabel random lalu dibentuk fungsi dari variabel pada level-2 :

$$\beta_j = w_j y + u_j \qquad (9)$$

Setiap w_j mempunyai dimensi $(p \; x \; q)$ dan merupakan matriks dari variabel asal pada grup ke-j dan $u_j \sim N(0,\tau)$. Dikarenakan τ tidak perlu berbentuk diagonal, maka elemen-elemen dari vektor random β_j tidak independen.

Proses kombinasi antara persamaan (7) dan persamaan (8) menghasilkan persamaan tunggal sebagai berikut :

$$Y_j = X_j W_j \gamma + X_j u_j + \varepsilon_j \gamma \qquad (10)$$

Persamaan ini dapat di pandang sebagai kasus khusus dari model linier campuran dengan efek tetap γ dan efek random u_j. Secara garis besar, y_j mempunyai harga harapan $(E(y_j))$ sebesar $X_j W_j \gamma$ dan $V_j = X_j \tau X_j^{'} + \sigma^2 I$.

Observasi pada grup yang sama memungkinkan adanya gangguan korelasi dan korelasi ini akan menjadi lebih besar jika variabel prediktornya lebih kompleks. Berikut proses estimasi dari parameternya. Diberikan fungsi *likelihood* sebagai berikut :

$$f(\sigma^2,\tau,\gamma) = \frac{\sqrt{x_j x_j^{'}\tau + \sigma^2}}{\sqrt{(2\pi)^{n_j}}} e^{-\frac{(Y_j - X_j w_j \gamma)}{2}} \sim N(0,\sigma^2)$$

$$\prod_{j=1}^{k} f(\sigma^2,\tau,\gamma) = (2\pi)^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} n_j}{2}} \left|x_j x_j^{'}\tau + \sigma^2\right|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(Y_j - X_j w_j \gamma)}{2}} \qquad (11)$$

Kemudian bentuk *log-likelihood* dari fungsi *likelihood*-nya sebagai berikut :

$$\log\left(\prod_{j=1}^{k} f(\sigma^2,\tau,\gamma)\right) = \log\left((2\pi)^{-\frac{n_j}{2}}\right) + \log\left(\left|x_j x_j^{'}\tau + \sigma^2\right|^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{(Y_j - X_j w_j \gamma)}{2}$$

$$L_j(\sigma^2,\tau,\gamma) = -\frac{n_j}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\left[\log\left(\left|x_j x_j^{'}\tau + \sigma^2\right|^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}(Y_j - X_j w_j \gamma)\right] \qquad (12)$$

$$\frac{\partial L_j(\sigma^2,\tau,\gamma)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial L_j(\sigma^2,\tau,\gamma)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2x_j x_j^{'}}$$

$$\frac{\partial L_j(\sigma^2,\tau,\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2} x_j w_j$$

Dikarenakan j bersifat independen, dapat ditulis *log-likelihood* untuk keselurahan model merupakan jumlahan unit-unit *log-likelihood*, yaitu :

$$L(\sigma^2,\tau,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} L_j(\sigma^2,\tau,\gamma) \qquad (13)$$

Dengan penumpukan yang benar dari setiap data pada setiap J unit dilevel-2, maka dapat dimungkinakan untuk menulis model untuk keseluruhan data tanpa menuliskan subskripnya, maka didapatkan :

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (14)$$

dengan $r \sim N(0,\psi)$ dimana :

$$Y = (Y_1', Y_2', \ldots, Y_j');\ \beta = (\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_j');$$

$$r = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_j')$$

Dan

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_j \end{bmatrix} \text{dan } \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \psi_j \end{bmatrix}$$

dimana level-2 tanpa mengikutsertakan subskripnya, sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\beta = W\gamma + u \tag{15}$$

Dimana u berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan matriks kovarian T, dimana :

$$W = (w_1', w_2', \ldots, w_j')' ;\ u = (u_1', u_2', \ldots, u_j')'$$

Dengan menggabungkan persamaan, keseluruhan model dapat ditulis :

$$Y = XW\gamma + Xu + \varepsilon \tag{16}$$

Dimana diketahui bahwa $E(y) = XW\gamma$ dan $Var(y) = XTX' + \Psi$. Kemudian dari persamaan (13) dimana *estimasi maximum likelihood* untuk ketiga parameter σ^2, τ, γ telah ditperoleh.

Bagaimanapun juga hasil utama bahwa estimasi dari β_j ditunjukkan sebagai kombinasi linier dari *OLS* yaitu $\widehat{\beta} = (X_j'X_j)^{-1} X_j\gamma Y$. Secara lebih formal diasumsikan bahwa komponen variansi dan γ telah diketahui, maka estimasi dari model multilevel untuk koefisien β_j dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\widehat{\beta}_j^* = \Theta_j + (1 - \Theta_j) W_j\gamma \tag{17}$$

Dimana

$$\Theta_j = \tau\left(\tau + \sigma^2 (X_j'X_j)^{-1}\right)^{-1} \tag{18}$$

Merupakan rasio dari variansi parameter untuk $\beta_j(\tau)$ relatif terhadap varansi dari $\sigma^2 (X_j'X_j)^{-1}$. Persamaan (17) merupakan estimator dari variansi β_j dari harga harapan β_j jika diketahui y_{ij} adalah :

$$\begin{aligned} E(\beta_j | y_j) &= E(\beta_j) + Cov(\beta_j, y_j)\left[Var(y_j)\right]^{-1} \\ &\quad \left[y_j - E(y_j)\right] \\ &= W_j y + \tau X_j' V_j^{-1} (y_j - X_j W_j \gamma) \\ &= W_j \gamma + \tau X_j' V_j^{-1} y_j \\ &\quad - W_j \gamma \tau X_j' V_j^{-1} y_j X_j W_j \gamma \end{aligned} \tag{19}$$

(Swamy, 1971) membentuk persamaan berikut sebagai invers dari V_j,

$$\begin{aligned} V_j^{-1} &= \sigma^{-2}\left[I - X_j (X_j'X_j)^{-1} X_j'\right] \\ &\quad + X_j (X_j'X_j)^{-1} A_j^{-1} (X_j'X_j)^{-1} X_j' \end{aligned} \tag{20}$$

Dimana $A_j = \tau + \sigma^2 (X_j'X_j)^{-1}$.

Hal ini berdampak pada $X_j'V_j^{-1}X_j = A_j^{-1}$ dan $X_j'V_j^{-1}X_j = A_j^{-1}\widehat{\beta}_j$ (De leew & Kreft, 1986).

Subtitusikan kedua hasil pada persamaan (19) maka akan didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(\beta_j | y_j) &= W_j\gamma + \tau A_j^{-1}\widehat{\beta}_j - \tau A_j^{-1} W_j \gamma \\ &= \tau A_j^{-1}\widehat{\beta}_j + (I - \tau A_j^{-1}) W_j\gamma \\ &= \Theta\widehat{\beta}_j + (I - \Theta) W_j \gamma \end{aligned} \tag{21}$$

Ekspektasi kondisional pada persamaan (21) merepresentasikan estimator yang diketahui sebagai MMSE (*Minimum Mean Sqaure Estimator*) dari β_j (Chapman, 1964; Rao, 1965). Diketahui bahwa estimator dari efek random u sebagai berikut :

$$\widehat{u}_j = C_j^{-1} X_j' (y_j - X_j W_j \gamma) \tag{22}$$

Dimana

$$C_j = X_j'X_j + \sigma^2\tau \tag{23}$$

Dari persamaan (10) maka diketahui perhitungan untuk nilai γ adalah sebagai berikut :

$$\gamma = \left(\sum_{j=1}^{J} W_j' X_j' V_j^{-1} X_j W_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{J} W_j' X_j' V_j^{-1} X_j y_j \qquad (24)$$

dimana $V_j = Var(y_j) = X_j \tau X_j + \sigma^2 I$.

4.2. Estimasi Parameter Untuk Variansi Model Komponen

Persamaan (10) dapat dikembangkan lebih lanjut menjadi bentuk standar untuk memodelkan variabel penjelas, yaitu :

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{1ij} + \sum_{h=2}^{n} u_{hj} Z_{hij} + \left(u_{0j} + u_1 j x_{ij} + e_{0ij}\right)$$

dan dalam bentuk yang lebih pendek yaitu :

$$y_{ij} = x_{1ij}\beta + \sum_{h=2}^{n} u_{hj} Z_{hij} + e_{0ij} Z_{hij} \qquad (25)$$

Dimana digunakan variabel penjelas yang baru untuk bagian variabel random dari model dan dapat ditulis secara lebih umum sebagai :

$z = \{z_0 \ z_1\}$; $z_0 = \{1\}$ merupakan vektor dari 1 dan $z_1 = \{x_{1ij}\}$. Diberikan matriks Ω_2 yang merupakan matriks kovarians dari random intersep dan *slope* pada level-2. Dan matriks Ω_1 merupakan matriks kovarian untuk koefisien random pada level-1. Sehingga dapat ditulis $\Omega = \{\Omega_i\}$ untuk sekumpulan matriks kovarian.

$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ dengan :

$$A = \sigma_{u0}^2 + 2\sigma_{u01} x_{1j} + \sigma_{u1}^2 x_{ij}^2 + \sigma_{e0}^2$$

$$B = \sigma_{u0}^2 + \sigma_{u01}\left(x_{1j} + x_{2j}\right) + \sigma_{u1}^2 x_{ij}^2$$

$$C = \sigma_{u0}^2 + 2\sigma_{u01} x_{2j} + \sigma_{u1}^2 x_{2j}^2 + \sigma_{e0}^2$$

Diberikan $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = X_j \Omega_2 X_J^T + \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix}$;

$$Xj = \begin{bmatrix} 1 & x_{1j} \\ 1 & x_{2j} \end{bmatrix}; \ \Omega_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{u0}^2 & \sigma_{u01} \\ \sigma_{u01} & \sigma_{u1}^2 \end{bmatrix}; \ \Omega_1 = \sigma_{e0}^2$$

4.3. Estimasi Bagi Model Multilevel

Diberikan komponen variansi dari model 2 level sederhana :

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + u_{0j} + e_{0ij} \qquad (26)$$

Nilai variansi dianggap telah dikatahui (Goldstein, 1999), oleh karena itu dapat dibentuk matriks *block-diagonal* yang dilambangkan dengan V, kemudian dapat diterapkan pada prosedur estimasi GLS (*Generalized Least Square*) untuk memperoleh penduga untuk koefisien :

(27)

Dimana pada kasus ini :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n_m n} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n_m m} \end{bmatrix} \qquad (28)$$

Dengan m unit level-2 dan n_j unit level-1 pada unit level-2 ke- j. Koefisien residual mempunyai distribusi normal, maka persamaan (27) juga mengahasilkan *Estimasi Maximum Likelihood* (Goldstein, 1999).

4.4. Metode Maximum Likelihood Estimations

Fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* merupakan dasar untuk menentukan estimasi dari parameter pada data. Ketika bentuk dari fungsi berbeda maka akan didapatkan titik pada nilai yang sama. Pada kenyataanya, nilai dari p yang berkorespondensi dengan titik maksimal didefinisikan sebagai estimasi *maximum likelihood* dan nilai tersebut dinotasikan sebagai $\hat{\beta}$ yang nilainya seringkali berhubungan dengan nilai lainnya.

Standar dari metode analisis MLE ini adalah memperoleh derivatif parsial yang disamadenganakan dengan 0 pertama dari *log-likelihood* pada setiap parameter pada model.

$$\frac{\partial \ln\left(L(p)\right)}{\partial p} = 0 \qquad (29)$$

Dari proses persamaan diatas, maka akan didapatkan nilai estimasi untuk parameter$(\hat{p})$. Pada model kebanyakan, parameter yang dipunyai seringkali tidak hanya satu yang berpengaruh.

Secara umum, dipunyai K parameter yaitu $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K$. Berdasarkan model yang spesifik, maka dapat dibentuk *log-likelihood*-nya, yaitu :

$$\log\left(L\left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K \,|\, data\right)\right) \equiv \log(L) \qquad (30)$$

Dan persamaan K *log-likehood*:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta_1} = 0 \\ &\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta_2} = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta_K} = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Solusi dari persamaan (29) memberikan nilai estimator untuk MLE $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_K$.

5. Kesimpulan

1) Fungsi *likelihood* adalah ukuran yang menyatakan seberapa sering nilai θ, diberikan bahwa x telah terobservasi. Fungsi *likelihood* bukan suatu peluang.
2) Misalkan $L(\theta)$ adalah fungsi *likelihood* (fungsi parameter dari θ), maka kita dapat menentukan nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$. Penaksir untuk θ adalah $\widehat{\theta}$ disebut Penaksir *Likelihood Maksimum* (MLE) yang merupakan fungsi dari peubah acak.
3) Metode Maximum Likelihood Estimation (MLE) digunakan jika populasi dari distribusinya diketahui.

6. Daftar Pustaka

[1] Goldstein, H. (1999). Multilevel Statistical Models. London : Institute of Education, Multilevel Model Project.

[2] Hox, J. (2002). Multilevel Analysis Techniques and Applications. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[3] Searle, S.R., Casella, G & McCulloch,C.E. (1992). Variance Components. CA : Sage, Thousands Oaks.

[4] West, B.T., K.B. Welch & A.T. Galecki. (2007). Linier Mixed Model : A Practical Guide Using Statistical Software. New York : Chapman & Hall.